

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Section de mathématiques

FACULTÉ DES SCIENCES
Professeur: A. FROLICHER

Sur les déformations d'algèbres

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques

par

Stanislas KLASA

de

Varsovie

Thèse N° 1493

MONTREAL
McGill University Press
1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545917_0066

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Section de mathématiques

FACULTÉ DES SCIENCES
Professeur: A. FROLICHER

Sur les déformations d'algèbres

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques

par

Stanislas KLASA

de

Varsovie

Thèse N° 1493

MONTREAL
McGill University Press
1973



du
La faculté des sciences, sur le préavis de Monsieur le professeur A. FROLICHER,
directeur de thèse, et d'une commission composée des pro-
fesseurs A. HAEFLIGER et C. WEBER,

autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les
propositions qui y sont énoncées.

GENÈVE, le 1er juillet 19 69

Le doyen Marc VUAGNAT

Thèse N° 11493

Filippini

SUR LES DEFORMATIONS D'ALGEBRES

par Stanislas Kłasa - Genève

INTRODUCTION

Si l'on exclut les recherches de Riemann (1857) sur les déformations de structure complexe sur une surface de Riemann compacte, de Max Noether (1888) dans le cas de surface algébrique et plus récemment de Teichmüller, on peut dire que la théorie moderne de déformation avait été initiée par Alfred Frölicher et Albert Nijenhuis. Leurs travaux ont été immédiatement suivis et développés par Kodaira-Spencer, Kuranishi, Nirenberg et dernièrement Griffiths dans le cas géométrique (i.e. différentiable ou analytique). D'autre part une théorie de déformation de structures algébriques a été initiée par M. Gerstenhaber et suivie par A. Nijenhuis et R.W. Richardson (Jr.). Le cadre naturel de cette dernière est bien entendu la géométrie algébrique.

Ces deux branches de la théorie présentent de remarquables analogies, en particulier la cohomologie servant à "mesurer" la déformation d'une structure peut être calculée à partir d'une algèbre graduée de Lie convenable. Dans le cas de variétés, une telle algèbre avait été introduite par Frölicher-Nijenhuis pour les formes différentielles vectorielles, il y a une dizaine d'années, et dans divers cas algébriques plus récemment par M. Gerstenhaber et Nijenhuis-Richardson.

Dans ce travail, nous présentons des méthodes d'aborder l'étude de stabilité dans le cas des structures d'algèbres (associatives ou non).

Pour démontrer le théorème de rigidité avec une généralité convenable, nous avons dû abandonner l'utilisation des algèbres de Lie graduées dont le succès était lié à la nature des algèbres étudiées, (voir chapitre II), et étudier les extensions d'une algèbre donnée.

Le chapitre 0 contient quelques définitions et notions utilisées dans la suite. On y reformule la définition d'ensembles algébriques et de vecteurs

tangents en termes plus maniables pour nous, basés sur l'utilisation d'applications polynomiales.

Le chapitre I contient une étude détaillée d'une classe d'algèbres de Jordan. Tous les calculs explicites sont donnés. On y retrouve le théorème de rigidité analogue à celui concernant les algèbres associatives de Lie, la cohomologie de ces algèbres et une esquisse d'étude des obstructions, qui toutefois ne va pas aussi loin que celle de M. Gerstenhaber et Nijenhuis-Richardson.

Dans le chapitre II, en s'inspirant des calculs du chapitre I, nous donnons un procédé général permettant de vérifier si une extension est de type voulu ou non. Le théorème de rigidité s'obtient ici d'une façon naturelle. Ensuite nous donnons un critère suffisant d'absence d'obstruction dans le cas où l'on peut prolonger notre procédé d'une étape.

Il nous a été impossible, pour le moment, de caractériser avec assez de généralité les types d'algèbres pour lesquels il existe une théorie de cohomologie utilisable.

Notons également qu'il est possible de développer une théorie analogue pour les coalgèbres, bigèbres, etc.

Qu'il me soit permis d'exprimer mes remerciements les plus chaleureux au Professeur A. Nijenhuis dont les nombreux conseils m'ont permis de mener ce travail à son terme.

Je tiens également à dire ma profonde reconnaissance aux Professeurs A. Frölicher et A. Haefliger, qui m'ont offert une hospitalité chaleureuse à l'Institut Mathématique de l'université de Genève, durant la préparation de ce travail.

Ma reconnaissance et mon admiration vont également au Professeur J. L. Koszul qui, avec beaucoup de patience m'avait initié aux secrets de la théorie de déformation et aux travaux de Grands Déformateurs.

Mes remerciements s'adressent aussi au Professeur C. Weber qui a bien voulu accepter de faire partie du Jury de cette thèse ainsi qu'à tous mes camarades de Genève et Grenoble pour leur enthousiasme dans de nombreuses discussions.

2. Variétés tangentielles et théorème de rigidité	11
3. La cohomologie et les observations	16

CHAPITRE 2. Le cas abélien

1. Exemples d'un module	17
2. Types d'algèbres	18
3. Extensions d'algèbres de type 3	22
4. Les observations	24

ANNEAUX APPENDICE	25
-------------------	----

SOMMAIRE

	PAGE
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 0: <u>Applications polynomiales et leurs dérivées</u>	
1. Applications polynomiales	2
2. Dérivées d'une fonction polynomiale	4
3. Dérivées d'une application polynomiale	6
4. Ensembles algébriques et vecteurs tangents	7
CHAPITRE 1: <u>Cohomologie de certaines algèbres de Jordan</u>	
- . Introduction	9
1. Extensions	10
2. Vecteurs tangents et théorème de rigidité	11
3. La cohomologie et les obstructions	16
CHAPITRE 2: <u>Le cas général</u>	
1. Epouvantail d'un module	19
2. Types d'algèbres	19
3. Extensions d'algèbres de type S	22
4. Les obstructions	25
BIBLIOGRAPHIE	29

NOTATIONS

Dans tout ce travail, k désigne un anneau commutatif unitaire, V un k -module libre de type fini et μ un produit bilinéaire défini sur V . Si X et Y sont deux ensembles on désignera par $G(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y .

Dans les questions concernant les obstructions, nous supposons en plus que 2 est inversible dans k .

CHAPITRE 0

Applications polynomiales et leurs dérivées1. Applications polynomiales

Définition 1. L'image d'un polynôme $P \in k[T_1, \dots, T_n]$ par l'application canonique

$$k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow G(k^n, k)$$

est appelée fonction polynomiale sur k^n ; elle sera notée encore par P si aucune confusion n'est à craindre.

L'ensemble de toutes les fonctions polynomiales sur k^n sera noté $\text{Pol}(k^n, k)$ ou plus simplement $\text{Pol}(k^n)$, il est canoniquement muni d'une structure d'algèbre sur k .

L'image d'une combinaison linéaire de monômes de degré d est dite polynomiale homogène de degré d . l'algèbre $\text{Pol}(k^n)$ est donc munie d'une graduation naturelle.

Définition 2. Une application $f: k^n \rightarrow k^{n'}$ est dite polynomiale si elle induit un homomorphisme

$$\tilde{f}: \text{Pol}(k^{n'}) \rightarrow \text{Pol}(k^n)$$

défini par $\tilde{f}(P) = P \cdot f$.

Pour vérifier qu'une application f comme plus haut est polynomiale il suffit de vérifier que les fonctions polynomiales $T_i \cdot f$ sont homogènes de degré d , l'application f est dite polynomiale homogène de degré d .

Proposition 1. Pour qu'une application $f: k^n \rightarrow k^{n'}$ soit polynomiale homogène de degré d il faut et il suffit qu'il existe une application d -linéaire $\bar{f}$ appelée (improprement) polarisée de f définie sur $(k^n)^d$ à valeurs dans $k^{n'}$ telle que l'on ait

$$(*) \quad f(x) = \bar{f}(x, \dots, x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } k^n.$$

Démonstration. Supposons que $(*)$ soit vérifié. Pour toute suite $(x_1, \dots, x_d)$ de d vecteurs de k^n , où la base est désignée par $(e_1, \dots, e_n)$, on a

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_1, \dots, x_d) &= \bar{f}\left(\sum_{j \in Q(\{1, \dots, d\}, \{1, \dots, n\})} x_1^{j(1)} x_2^{j(2)} \dots x_d^{j(d)} (e_{j(1)}, \dots, e_{j(d)})\right) \\ &= \sum_{j \in Q(\{1, \dots, d\}, \{1, \dots, n\})} x_1^{j(1)} x_2^{j(2)} \dots x_d^{j(d)} f(e_{j(1)}, \dots, e_{j(d)}) \end{aligned}$$

Notons par v_j le vecteur de $k^{n'}$ égal à $f(e_{j(1)}, \dots, e_{j(d)})$ et v_j^1 ($j=1, \dots, n'$) ses composantes relativement à la base canonique $(e_1', \dots, e_{n'}')$ de $k^{n'}$. Nous avons donc

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j \in Q(\{1, \dots, d\}, \{1, \dots, n\})} x_1^{j(1)} \dots x_d^{j(d)} \left(\sum_{\ell=1}^{n'} v_j^{\ell} e_{\ell}' \right)$$

et pour tout indice $\ell=1, \dots, n'$

$$(T_1 \cdot f)(x) = \sum_j x^{j(1)} \dots x^{j(d)} v_j^1.$$

Pour tout indice $l = 1, \dots, n'$ nous voyons que $T_1 \cdot f$ est polynomiale homogène de degré d .

Réciproquement supposons f polynomiale homogène de degré d .

Pour tout indice $l = 1, \dots, n'$ on peut écrire:

$$(T_1 \cdot f)(x) = \sum_{j \in G(\{1, \dots, d\}, \{1, \dots, n\})} f_j^1 x^{j(1)} \dots x^{j(d)}.$$

L'application $\tilde{f}$ définie sur le module produit de d copies de k^n par:

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j \in G(\{1, \dots, d\}, \{1, \dots, n\})} x_1^{j(1)} \dots x_d^{j(d)} \sum_{l=1}^{n'} f_j^l e_l^1,$$

est une application d -linéaire telle que

$$\tilde{f}(x, \dots, x) = f(x).$$

2. Dérivée d'une fonction polynomiale

Notation. Etant donnée une fonction polynomiale P homogène de degré d définie sur k^n on note

$$(D_{x_0} P)(x) = \sum_{i=1}^d \bar{P}(x_0, \dots, x_0, \overset{i}{\underbrace{x}}, x_0, \dots, x_0),$$

où $\bar{P}$ est une fonction d -linéaire associée à P . On vérifie immédiatement que cette notion ne dépend pas du choix de $\bar{P}$.

Pour une fonction polynomiale P quelconque on pose:

$$D_{x_0} P = \sum_d D_{x_0} P^d$$

où P^d est la composante de degré d de P .

Remarque 1. La fonction $D_{x_0} P$ définie sur k^n à valeurs dans k est linéaire.

Rappelons qu'étant données deux k -algèbres A et B et un homomorphisme

$$\varphi: A \rightarrow B$$

on appelle φ -dérivation de A dans B toute application k -linéaire:

$$D: A \rightarrow B$$

telle que l'on ait

$$D(xy) = D(x)\varphi(y) + \varphi(x)D(y)$$

pout tout x et y de A .

Remarque 2. Si A est une algèbre de fonctions polynomiales d'un k -module libre de dimension n , le module des φ -dérivations de A dans B est isomorphe à B^n ; en effet une φ -dérivation D définie sur A est déterminée par la famille $D(T_i)$ ($i=1, \dots, n$) d'éléments de B .

La φ -dérivation D est alors dite associée à l'élément $Y = (D(T_1), \dots, D(T_n))$ de B^n .

Proposition. L'application définie sur l'algèbre des fonctions polynomiales de k^n à valeurs dans k par:

$$p \rightarrow (D_{x_0} p)(x)$$

est la $\hat{x}_0$ -dérivation associée au vecteur x , où $\hat{x}_0$ est l'homomorphisme

$$\text{Pol}(k^n) \rightarrow k$$

$$k \rightarrow p(x_0).$$

Démonstration. Par définition on a: $(D_{x_0} T_i)(x) = x_i \quad (i=1, \dots, n)$.

Il suffit de faire la vérification pour les fonctions polynomiales p et p' homogènes de degrés n et n' .

La fonction $(n+n')$ -linéaire $\bar{p} \cdot \bar{p}'$ vérifie

$$(\bar{p} \cdot \bar{p}')(x, \dots, x) = \bar{p}(x, \dots, x) \cdot \bar{p}'(x, \dots, x) = p(x) p'(x)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} (D_{x_0} p p')(x) &= \sum_{i=1}^{n+n'} (\bar{p} \cdot \bar{p}') x_0, \dots, x_0, \overset{i}{x}, x_0, \dots, x_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n p(x_0, \dots, x, \dots, x_0) \cdot p'(x_0, \dots, x_0) + \\ &\quad + p(x_0, \dots, x_0) \sum_{j=1}^{n'} p'(x_0, \dots, x, \dots, x_0) \end{aligned}$$

donc finalement

$$\begin{aligned} (D_{x_0} p p')(x) &= (D_{x_0} p)(x) \cdot p'(x_0) + p(x_0) \cdot (D_{x_0} p')(x) = \\ &= (D_{x_0} p)(x) \cdot \hat{x}_0(p') + \hat{x}_0(p) \cdot (D_{x_0} p')(x). \end{aligned}$$

3. Dérivée d'une application polynomiale.

Notation. Soit $p: k^n \rightarrow k^{n'}$ une application polynomiale homogène de degré d , on pose

$$(D_{x_0} p)(x) = \sum_{i=1}^d \bar{p}(x_0, x_0, \dots, \underset{i}{x}, \dots, x_0)$$

où $\bar{p}$ est l'application d -linéaire associée à p .

Si l'on a

$$p = \sum_{i=1}^r p_i$$

où chaque p_i est homogène de degré i , on pose

$$(D_{x_0} p)(x) = \sum_{i=1}^r (D_{x_0} p_i)(x).$$

Proposition. Pour toute application polynomiale $p: k^n \rightarrow k^{n'}$ on a :

$$(D_{x_0} p)(x) = \sum_{\ell=1}^{p'} D_{x_0} (T_{\ell} \cdot p)(x) e_{\ell}',$$

où $(e_{\ell}')_{\ell=1, \dots, n'}$ est la base canonique de $k^{n'}$.

Démonstration. Il est suffisant de démontrer la proposition dans le cas où p est une application polynomiale homogène de degré d . Par rapport à la base $(e_{\ell}')_{\ell=1, \dots, n'}$, on peut écrire

$$(D_{x_0} p)(x) = \sum_{\ell=1}^{n'} \left(\sum_{i=1}^d (T_{\ell} \cdot \bar{p})(x_0, \dots, x_0, \underset{i}{x}, \dots, x_0) \right) e_{\ell}'.$$

Or la quantité $\sum_{i=1}^d T_{\ell} p(x_0, \dots, x_0, \overset{i}{x}, \dots, x_0)$ est la valeur de la $\hat{x}_0$ -dérivée associée à x de la fonction polynomiale $T_{\ell} \cdot p$.

4. Ensembles algébriques et vecteurs tangents

Les ensembles algébriques dans k^n sont exactement les noyaux des applications polynomiales définies sur k^n (à valeurs dans un $k^{n'}$ où $n \in \mathbb{N}$).

En effet considérer un ensemble $S = p^{-1}(0)$ où $p: k^n \rightarrow k^{n'}$ est polynomiale revient à considérer n' fonctions polynomiales $T_i \circ p: k^n \rightarrow k$, donc n' polynômes de $A = k[T_1, T_2, \dots, T_n]$. Réciproquement toute famille finie $P_1, \dots, P_{n'}$ de polynômes de A donne naissance à une application polynomiale $p: k^n \rightarrow k^{n'}$.

Rappelons que l'ensemble noté I_S des fonctions polynomiales s'annulant sur un ensemble algébrique S est un idéal de l'algèbre $\text{Pol}(K^n)$.

La maniabilité des applications polynomiales est également utile pour décrire l'espace tangent (algébrique) en un point x_0 de S .

En fait nous pouvons énoncer la

Proposition. Soit S un ensemble algébrique noyau d'une application polynomiale $p: k^n \rightarrow k^{n'}$ et x_0 un point de S . L'espace tangent en x_0 à S , noté $T_{x_0}(S)$ est alors isomorphe au noyau $\text{Ker } D_{x_0} p$ de l'application dérivée $D_{x_0} p: k^n \rightarrow k^{n'}$.

Démonstration. L'espace tangent en x_0 à S est l'espace des $\hat{x}_0$ -dérivations définies sur l'algèbre $\text{Pol}(k^n)$ et à valeurs dans k , s'annulant sur l'idéal I_S . L'espace $\hat{\text{Dér}}_{x_0}(\text{Pol}(k^n), k)$ pouvant être identifié à l'espace vectoriel (ou module) k^n grâce à

$$x \mapsto (D_{x_0} \cdot)(x)$$

l'espace tangent en x_0 à S sera ainsi un sous-espace de k^n .

Une dérivation s'annule sur l'idéal I_S si et seulement si elle s'annule sur chaque fonction polynomiale $T_i \cdot p$ ($i=1, \dots, n'$); c'est-à-dire qu'un vecteur x est tangent en x_0 à $S(V)$ si et seulement s'il vérifie le système d'équations:

$$(D_{x_0} (T_i \cdot p))(x) = 0 \quad (i=1, \dots, n')$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^{n'} (D_{x_0} (T_i \cdot p))(x) e_i' = 0$$

ou plus simplement

$$(D_{x_0} p)(x) = 0.$$

Ceci termine la démonstration.

CHAPITRE 1

Cohomologie de certaines algèbres de Jordan

Depuis bientôt 25 ans on connaît la cohomologie des algèbres associatives et l'isomorphisme du groupe $H^2(A, M)$ avec le groupe des extensions $\text{Ext}(A, M)$, où A est une algèbre et M un A -bimodule (Voir Hochschild [4]). Cet isomorphisme reste valable si $A = (V, \mu)$ est une algèbre définie par un élément μ de carré nul d'un système de composition de Nijenhuis [8] associé à V .

D'autre part, on connaît l'importance des groupes $H^2(A, A)$ et $H^3(A, A)$ dans la théorie des déformations d'algèbres développés ces dernières années par M. Gerstenhaber, A. Nijenhuis, R.W. Richardson et d'autres (voir la bibliographie). Cette théorie ainsi que la construction d'une algèbre de Lie graduée associée est essentiellement liée à l'utilisation d'algèbres définies par des conditions linéaires et quadratiques imposées sur les constantes de structure.

En étudiant directement le groupe des extensions d'une algèbre A par elle-même (considérée comme bimodule avec produit nul) nous nous proposons d'étendre certains résultats de Gerstenhaber, Nijenhuis et Richardson à une classe plus générale d'algèbres.

Comme illustration de notre méthode nous avons choisi une classe d'algèbres de Jordan définie par la condition

$$(A) \quad ((xy)z)s = (xy)(zs) \quad x, y, z, s \in V.$$

Les algèbres vérifiant l'axiome (A) ou plus simplement les multiplications μ seront appelées de types S. Nous verrons dans le chapitre 2 une généralisation au cas du type S "assez général".

1. Extensions

Pour une algèbre $A = (V, \mu)$ de type S nous allons étudier les extensions E, (dites encore de type S) telle que la suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$$

soit scindée. Le produit μ_φ dans E est alors donné par la formule

$$(**) \quad (a, b) \cdot (a', b') = (\mu(a, a'), \mu(a, b') + \mu(b, a') + \varphi(a, a'))$$

où $a, a', b, b' \in V$ et $\varphi: V \times V \rightarrow V$ est une application bilinéaire; nous allons identifier φ à l'extension E qu'elle donne. Pour parler du groupe $\text{Ext}(V, \mu)$ nous allons identifier deux extensions E et E' équivalentes, i.e. telle qu'il y a un homomorphisme (nécessairement bijectif) $g: E \rightarrow E'$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & E & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\quad g \quad} & A & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & E' & & & & \end{array}$$

commutatif.

Désignons par L le module gradué tel que

$$L^n = \text{Hom}_K(\overset{2n}{\otimes} V, V).$$

L'axiome (A) définit une application cubique

$$L^1 \quad F \quad , L^2$$

tel que $F(\mu)(x, y, z, s) = ((xy)z)s - (xy)(zs)$, $\mu \in L^1$, $x, y, z, s \in V$ le produit étant défini par μ .

L'ensemble algébrique $S(V)$, noyau de F , est exactement l'ensemble de toutes les multiplications de type S .

Théorème 1. Si μ est de type S , alors le noyau de l'application dérivée

$\delta_{\mu}^1 = D_{\mu} F$ est l'ensemble de toutes les extensions de type S , i.e.

$$\text{Ker } D_{\mu} F = \{\varphi \in L^1 : \mu_{\varphi} \text{ est de type } S\}.$$

En particulier l'ensemble des extensions de type S est un espace vectoriel.

Démonstration. Considérons quatre éléments $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ de $V \times V$. Le produit μ_{φ} est de type S si et seulement si l'on a

$$(((x_1, y_1)(x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3)) \cdot (x_4, y_4) - ((x_1, y_1)(x_2, y_2))((x_3, y_3)(x_4, y_4)) = 0.$$

Or ceci s'écrit

$$\begin{aligned} & (((x_1 x_2) x_3) x_4 - (x_1 x_2)(x_3 x_4)), ((x_1 x_2) x_3) y_4 - (x_1 x_2)(x_3 y_4) + ((x_1 x_2) y_3) x_4 \\ & - (x_1 x_2)(y_3 x_4) + ((x_1 y_2) x_3) x_4 - (x_1 y_2)(x_3 x_4) + ((y_1 x_2) x_3) x_4 \\ & - (y_1 x_2)(x_3 x_4) + (\varphi(x_1, x_2) x_3) x_4 - (x_1 x_2) \varphi(x_3, x_4) + \varphi(x_1 x_2, x_3) x_4 \\ & - \varphi(x_1, x_2)(x_3 x_4) + \varphi((x_1, x_2) x_3, x_4) - \varphi(x_1 x_2, x_3 x_4)) \\ & = (0, (D_{\mu} F)(\varphi)(x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0. \end{aligned}$$

Comme le noyau de $D_{\mu} F$ est l'espace tangent $T_{\mu}(S(V))$ en μ à $S(V)$ nous pouvons encore écrire

$$T_{\mu}(S(V)) = \{\varphi \in L^1; \mu_{\varphi} \text{ est de type } S\}.$$

L'ensemble $S(V)$ est stable sous l'action "naturelle" de $GL(V)$ sur L^1 , il contient donc l'orbite de μ si μ est de type S . En fixant μ dans $S(V)$ nous avons une application

$$GL(V) \rightarrow L^1$$

telle que l'application composée

$$GL(V) \rightarrow L^1 \xrightarrow{F} L^2$$

soit nulle. Il en est de même de l'application dérivée, en vertu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L^0 & \xrightarrow{\delta_{\mu}^0} & L^1 & \xrightarrow{\delta_{\mu}^1} & L^2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ GL(V) & \xrightarrow{\quad} & L^1 & \xrightarrow{F} & L^2 \end{array}$$

où $L^0 = \text{Hom}_k(V, V)$ s'interprète comme l'espace tangent à l'origine à $GL(V)$ et $\delta_{\mu}^0(\alpha)(x, y) = \alpha(xy) - \alpha(x)y - x\alpha(y)$ avec $\alpha \in L^0$, $x, y \in V$.

C'est cette situation que l'on rencontre quand on cherche à "prolonger" une cohomologie.

Pour l'instant nous pouvons étudier le quotient du noyau de δ_{μ}^1 par l'image de δ_{μ}^0 , c'est-à-dire le quotient de l'espace tangent en μ à $S(V)$ et à l'orbite de μ (voir Nijenhuis-Richardson [9]) et nous avons le

Théorème 2 (de rigidité) Si le groupe des extensions $\text{Ext}(V, \mu)$ est nul alors l'algèbre définie par μ est rigide.

Démonstration. Comme l'ensemble de toutes les extensions de μ est l'espace tangent en μ à $S(V)$, il suffit de démontrer que deux extensions φ et φ' sont équivalentes si et seulement si leur différence est un vecteur tangent à l'orbite de μ , i.e. $\varphi' - \varphi \in \text{Im } \delta_{\mu}^0$.

En effet, dire que φ et φ' sont équivalentes revient à dire que l'on a un isomorphisme $g: V \times V \rightarrow V \times V$ qui commute avec les injections canoniques de V sur le second facteur et les projections de $V \times V$ sur le premier facteur.

Un tel isomorphisme est nécessairement de la forme:

$$g(a, b) = (a, b + \alpha(a)) \quad a, b \in V$$

où α est un endomorphisme linéaire de V dépendant de g .

D'autre part, nous avons

$$g(\mu_{\varphi}((a, b), (a', b'))) = \mu_{\varphi'}(g(a, b), g(a', b'))$$

d'où

$$g(\mu(a, a'), \mu(a, b') + \mu(b, a') + \varphi(a, a')) = \mu_{\varphi'}((a, b + \alpha(a)), ((a', b' + \alpha(a'))))$$

ou bien

$$(aa', ab' + ba' + \varphi(a, a') + \alpha(aa')) = (aa', ba' + \alpha(a)a' + ab' + a(a') + \varphi'(a, a'))$$

en notant multiplicativement, d'où

$$\varphi(a, a') + \alpha(aa') = \alpha(a)a' + a\alpha(a') + \varphi'(a, a')$$

et enfin

$$(\varphi' - \varphi)(a, a') = \alpha(\mu(a, a')) - \mu(\alpha(a), a') - \mu(a, \alpha(a')) = \delta_{\mu}^0(\alpha)(a, a').$$

Dans le courant de la démonstration nous avons vu que

$$\text{Ext}(V, \mu) = \text{Ker } \delta_{\mu}^1 / \text{Im } \delta_{\mu}^0 = T_{\mu}(S(V)) / T_{\mu} \quad (\text{orbite de } \mu)$$

le théorème de rigidité est ainsi démontré.

Nous avons donc obtenu une théorie présentant des analogies remarquables avec la théorie de systèmes de composition de A. Nijenhuis. Pour l'exhiber dressons le tableau de quelques résultats:

<u>Cas associatif</u>	<u>Cas de type S</u>
$Z_{\mu}^1 = \{\varphi \in L^1 : [\mu, \varphi] = 0\}$	Si μ définit une algèbre de type S $\text{Ker } \delta_{\mu}^1 = \{\varphi \in L^1 : \varphi \text{ définit une extension de Jordan}\}$
$\mu \text{ ASSOCIATIVE} \Leftrightarrow \mu \cdot \mu = 0$	$\mu \text{ de type S} \Leftrightarrow F(\mu) = 0, \text{ i.e.}$
$S(V) = \{\mu \in L^1 : \mu \cdot \mu = 0\}$	$S(V) = \{\mu \in L^1 : F(\mu) = 0\}$
$Z_{\mu}^1 = T_{\mu}(S(V))$	$\varphi \text{ est une extension de Jordan} \Leftrightarrow \varphi \in T_{\mu}(S(V)), \text{ i.e.}$ $\text{Ker } \delta_{\mu}^1 = T_{\mu}(S(V))$
Théorème de rigidité	Théorème de rigidité
$H_{\mu}^1 = 0 \Rightarrow \mu \text{ est rigide}$	$\text{Ext}(V, \mu) = 0 \Rightarrow \mu \text{ est rigide}$

Le remplacement du groupe de cohomologie par celui d'extension permet de démontrer le théorème de rigidité dans des cas non traitables par la théorie classique. C'est bien le cas d'algèbres de Jordan. D'autre part, il est facile de vérifier que $\text{Ext}(V, \mu)$ est isomorphe à H_{μ}^1 provenant de

systèmes de composition de Nijenhuis, dans le cas associatif et de Lie ce qui entraîne que les deux théorèmes de rigidité coïncident.

A chaque structure μ de type S sur V, on peut associer une structure de complexe de cochaines sur L, prolongeant le diagramme

$$L^0 \xrightarrow{\delta_\mu^0} L^1 \xrightarrow{\delta_\mu^1} L^2,$$

définie par l'opérateur cobord suivant

$$\begin{aligned} (\delta_\mu f)(x_1, \dots, x_{2n+2}) &= (x_1 x_2) f(x_3, \dots, x_{2n+2}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(x_1, \dots, (x_{2i-1} x_{2i}) x_{2i+1}, \dots, x_{2n+2}) \\ &- (-1)^n [f(x_1, \dots, x_{2n-1} x_{2n}, x_{2n+1} x_{2n+2}) \\ &- f(x_1, \dots, x_{2n-1} x_{2n}, x_{2n+1}) x_{2n+2} \\ &+ f(x_1, \dots, x_{2n}) \cdot (x_{2n+1} x_{2n+2}) \\ &- (f(x_1, \dots, x_{2n}) x_{2n+1}) x_{2n+2}] \end{aligned}$$

où $f \in L^n$ et μ est noté multiplicativement.

Ainsi par la construction même nous avons l'identification canonique du groupe H_μ^1 au $\text{Ext}(V, \mu)$ ce qui permet d'énoncer le théorème de rigidité sous la forme plus semblable à l'énoncé classique. En plus comme dans la théorie classique H_μ^2 s'interprète comme un groupe d'obstructions.

Définition. Soit φ_1 un élément de Z_μ^1 . On dit que la première obstruction en φ_1 à la déformation de μ est nulle s'il existe une déformation $\mu_t = \mu + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots$ telle que $F(\mu_t) = 0 \pmod{t^3}$

Théorème. Si le groupe de cohomologie H_{μ}^2 est nul, la première obstruction en φ_1 est nulle 1-cocycle φ_1 .

Démonstration. Soit $\mu_t = \mu + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots$ une déformation de μ telle que φ_1 soit un élément de Z_{μ}^1 . Traduisons l'identité

$$F(\mu_t) = 0 \pmod{t^3}$$

$$\begin{aligned} F(\mu_t) \pmod{t^3} &= F(\mu) + t[\bar{F}(\mu, \mu, \varphi_1) + \bar{F}(\mu, \varphi_1, \mu) + \bar{F}(\varphi_1, \mu, \mu)] + \\ &+ t^2[\bar{F}(\mu, \varphi_1, \varphi_1) + \bar{F}(\varphi_1, \mu, \varphi_1) + \bar{F}(\varphi_1, \varphi_1, \mu) + \\ &+ \bar{F}(\mu, \mu, \varphi_2) + \bar{F}(\mu, \varphi_2, \mu) + \bar{F}(\varphi_2, \mu, \mu)]. \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} \chi_{\mu}(\varphi', \varphi'') &= \frac{1}{2}(\bar{F}(\mu, \varphi', \varphi'') + \bar{F}(\varphi', \mu, \varphi'') + \bar{F}(\varphi', \varphi'', \mu) + \bar{F}(\varphi'', \mu, \varphi')) \\ &+ \bar{F}(\varphi'', \varphi', \mu) + \bar{F}(\mu, \varphi'', \varphi')). \end{aligned}$$

Nous obtenons:

$$F(\mu_t) \pmod{t^3} = F(\mu) + \delta_{\mu}^1(\varphi_1) + t^2[\chi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_1) + \delta_{\mu}^1(\varphi_2)].$$

Or les quantités $F(\mu)$ et $\delta_{\mu}^1(\varphi_1)$ sont nulles. La condition à imposer pour la nullité de la première obstruction en φ_1 est donc:

$$\chi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_1) = -\delta_{\mu}^1(\varphi_2)$$

tandis que l'élément $\delta_{\mu}^1(\varphi_2)$ est un 2-cobord, nous allons montrer que

$\chi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_1)$ est un 2-cocycle.

Etant donné un élément φ de L^1 , considérons l'application

$$q_{\varphi}: L^1 \rightarrow L^3$$

définie par

$$q_{\varphi}(\psi) = (\delta_{\psi}^2 \cdot \delta_{\psi}^1)(\varphi)$$

où δ_{ψ}^2 et δ_{ψ}^1 sont les applications obtenues en remplaçant dans la définition de l'opérateur cobord δ_{μ} la lettre μ par ψ .

L'application q_{φ} est polynomiale homogène de degré 4. Considérons l'application $\overline{q}_{\varphi}$ définie par

$$\overline{q}_{\varphi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (\overline{\delta}_{\psi_1, \psi_2}^2 \cdot \overline{\delta}_{\psi_3, \psi_4}^1)(\varphi)$$

où $\overline{\delta}_{\psi_1, \psi_2}^2$ et $\overline{\delta}_{\psi_3, \psi_4}^1$ sont des polarisées de δ_{μ}^2 et δ_{μ}^1 .

Pour tout élément φ de L^1 l'application q_{φ} s'annule sur $S(V)$ puisque l'on a

$$\delta_{\mu}^2 \cdot \delta_{\mu}^1 = 0,$$

ainsi pour tout μ de $S(V)$, l'application dérivée $D_{\mu} q_{\varphi}$ s'annule sur l'espace tangent $T_{\mu} S(V)$, c'est-à-dire sur l'espace des 1-cocycles du complexe (L, δ_{μ}) .

Calculons la valeur de l'application dérivée $D_{\mu} q_{\varphi}$ en un point φ' de L^1 .

$$\begin{aligned} (D_{\mu} q_{\varphi})(\varphi') &= \overline{q}_{\varphi}(\varphi', \mu, \mu, \mu) + \overline{q}_{\varphi}(\mu, \varphi', \mu, \mu) + \overline{q}_{\varphi}(\mu, \mu, \varphi', \mu) + \overline{q}_{\varphi}(\mu, \mu, \mu, \varphi') \\ &= (\overline{\delta}_{\varphi', \mu}^2 \cdot \overline{\delta}_{\mu, \mu}^1)(\varphi) + (\overline{\delta}_{\mu, \varphi'}^2 \cdot \overline{\delta}_{\mu, \mu}^1)(\varphi) + \\ &\quad + (\overline{\delta}_{\mu, \mu}^2 \cdot \overline{\delta}_{\varphi', \mu}^1)(\varphi) + (\overline{\delta}_{\mu, \mu}^2 \cdot \overline{\delta}_{\mu, \varphi'}^1)(\varphi) = \\ &= (\overline{\delta}_{\varphi', \mu}^2 + \overline{\delta}_{\mu, \varphi'}^2)(\overline{\delta}_{\mu}^1(\varphi)) + \overline{\delta}_{\mu}^2(\overline{\delta}_{\mu, \varphi'}^1(\varphi) + \overline{\delta}_{\mu, \varphi'}^1(\varphi)). \end{aligned}$$

Si on note

$$\chi_{\mu}(\varphi, \varphi') = \frac{1}{2}(\overline{\delta_{\varphi', \mu}^1}(\varphi) + \overline{\delta_{\mu, \varphi'}^1}(\varphi))$$

on peut écrire

$$(D^1 q_{\mu})(\varphi') = (\overline{\delta_{\varphi', \mu}^2} + \overline{\delta_{\mu, \varphi'}^2})(\overline{\delta_{\mu}^1}(\varphi)) + 2\overline{\delta_{\mu}^2}(\chi_{\mu}(\varphi, \varphi')).$$

Si φ' est un élément de Z_{μ}^1 on obtient la relation:

$$(\overline{\delta_{\varphi', \mu}^2} + \overline{\delta_{\mu, \varphi'}^2})(\overline{\delta_{\mu}^1}(\varphi)) + 2\overline{\delta_{\mu}^2}(\chi_{\mu}(\varphi, \varphi')) = 0.$$

En choisissant φ dans Z_{μ}^1 , ceci devient

$$\overline{\delta_{\mu}^2}(\chi_{\mu}(\varphi, \varphi')) = 0,$$

autrement dit si φ et φ' sont des 1-cocycles, l'élément $\chi_{\mu}(\varphi, \varphi')$ est un 2-cocycle.

Ainsi, le groupe H_{μ}^2 étant nul, tout cocycle est égal à un cobord; pour tout 1-cocycle φ_1 , il existe donc un élément φ_2 vérifiant:

$$-\overline{\delta_{\mu}^1}(\varphi_2) = \chi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_1).$$

Pour tout cocycle φ_1 , la première obstruction à la déformation de type S de μ est nulle.

CHAPITRE II

Le cas général1. Epouvantail d'un module.

Etant donné un module M , on appelle épouvantail de M (voir [5]) une algèbre graduée $\mathcal{E}(M) = (\mathcal{E}^n(M))_{n \geq 1}$ définie par

$$\mathcal{E}^1(M) = M$$

$$\mathcal{E}^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathcal{E}^q(M)$$

et munie du produit tensoriel (non associatif).

Cette algèbre n'est libre que si le module M est libre.

2. Types d'algèbres.

Un type (algébrique) S de k -algèbres est la donnée d'une famille finie $(P_i)_{i \in I}$ d'éléments homogènes de degrés n_i des épouvantails de modules k^{n_i} .

Exemples

(1) Le type associatif est défini par un élément de $\mathcal{E}^3(k^3)$:

$$P_{\text{ass}} = (a_1 \otimes a_2) \otimes a_3 - a_1 \otimes (a_2 \otimes a_3).$$

(2) Le type d'algèbres de Lie est défini par deux éléments respectivement de $\mathcal{E}^2(k^2)$ et $\mathcal{E}^3(k^3)$:

$$P_{\text{ant}} = a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$$

$$P_{\text{jac}} = (a_1 \otimes a_2) \otimes a_3 + (a_2 \otimes a_3) \otimes a_1 + (a_3 \otimes a_1) \otimes a_2.$$

(3) Le type d'algèbres de Jordan étudié au Chapitre I est défini par

$$((a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) \otimes a_4 - (a_1 \otimes a_2) \otimes (a_3 \otimes a_4).$$

Remarque. La plupart des types d'algèbres rencontrés dans la pratique (et tous les exemples ci-dessus) peuvent se définir par des éléments de l'épouvantail sur $Z^{(N)}$ d'une façon intrinsèque indépendante de k .

Pour chaque entier n , l'algèbre $\mathcal{C}(k^n)$ étant libre, pour toute k -algèbre A et toute application f définie sur l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}$, il existe un morphisme d'algèbres $\tilde{f}$ et un seul rendant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \{a_1, \dots, a_n\} & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ \mathcal{C}(k^n) & \xrightarrow{\tilde{f}} & A \end{array}$$

Une k -algèbre (V, μ) est dite de type S si quelles que soient les applications f_i définies respectivement sur les ensembles $\{a_1, \dots, a_{n_i}\}$ et à valeurs dans (V, μ) les morphismes d'algèbres déduits $\tilde{f}_i$ annulent les éléments P_i .

Exemple. Une k -algèbre $A = (V, \mu)$ est associative si quelle que soit l'application

$$f: \{a_1, a_2, a_3\} \rightarrow A$$

(c'est-à-dire quel que soit le choix de 3 éléments x_1, x_2 et x_3 de A) on ait:

$$\tilde{f}(P_{\text{ass}}) = 0$$

c'est-à-dire

$$\tilde{f}((a_1 \otimes a_2) \otimes a_3 - a_1 \otimes (a_2 \otimes a_3)) = 0$$

ou bien

$$\mu(\mu(x_1, x_2), x_3) - \mu(x_1, \mu(x_2, x_3)) = 0.$$

Remarque. Une algèbre isomorphe à une algèbre de type S est également de type S.

Proposition 1. Pour chaque k-module libre V, l'ensemble S(V) des multiplications de type S sur V est un ensemble algébrique.

Démonstration. Soit P un élément de $\mathcal{E}^n(k^n)$; il donne naissance à une application

$$p: M(V) \rightarrow \text{Hom}(\otimes^n V, V)$$

définie par

$$p(\mu)(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(P)$$

où $\tilde{f}$ est le morphisme d'algèbres associé à l'application

$$f: \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow (V, \mu)$$

où $f(a_i) = x_i$.

Comme P est somme (finie) de produits tensoriels des a_i effectués n-1 fois, les termes de $\tilde{f}(P)$ sont des produits d'éléments $x_i = f(a_i)$ de A effectués n-1 fois, c'est-à-dire s'obtiennent en appliquant μ n-1 fois de suite. Ainsi on peut trouver une application $\tilde{p}$ (n-1)-linéaire polarisant p, ce qui signifie que p est polynomiale homogène de degré n-1. Le noyau de l'application p est l'ensemble des multiplications μ telles que $\tilde{f}(P) = 0$, c'est-à-dire telles que l'algèbre (V, μ) soit de type S (déterminé par P). L'ensemble S(V) noyau de cette application polynomiale est donc algébrique. Si le type S d'algèbres est déterminé par une famille finie (P_i) d'éléments des

épouvantails $\mathcal{P}^{n_1, n_1}_i(k)$, l'ensemble $S(V)$ égal à l'intersection des ensembles algébriques est encore algébrique.

Remarque. Les ensembles d'algèbres associatives et de Lie étudiées par Nijenhuis-Richardson et Gerstenhaber sont des ensembles algébriques quadratiques, i.e. définis par des polynômes homogènes de degré 2; par contre l'ensemble algébrique des multiplications de Jordan étudié au chapitre précédent est cubique.

Rappelons qu'une algèbre (V, μ) de type S est dite rigide si l'orbite de μ sous l'action "naturelle" de $GL(V)$ est un voisinage de μ dans $S(V)$. On utilise ici la topologie de Zariski ou bien, si $k = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ la topologie naturelle.

Remarque. La théorie générale de A.Nijenhuis-R.W.Richardson telle que présentée dans [9] donne des critères de rigidité de certains types d'algèbres. Ces critères s'établissent de la façon suivante: on compare l'espace tangent en μ à $S(V)$ et à l'orbite de μ . Si ces deux espaces coïncident, on obtient la rigidité de μ .

3. Extensions d'algèbres de type S.

Etant donné une algèbre $A = (V, \mu)$ de type S , l'ensemble des extensions scindées de type S de A par elle-même, est donné par l'ensemble des applications bilinéaires φ de V^2 dans V , satisfaisant aux équations:

$$P_i(\mu\varphi)((a_1, m_1), \dots, (a_{n_i}, m_{n_i})) = 0$$

où p_i est l'application polynomiale définie sur $\text{Hom}((V \times V) \otimes (V \times V)), V \times V)$

associée à l'élément P_i de $\mathcal{E}^{n_i, n_i}(k)$ et où

$$\mu_\varphi((a_i, m_i), (a_j, m_j)) = (\mu(a_i, a_j), \mu(a_i, m_j) + \mu(m_i, a_j) + \varphi(a_i, a_j)).$$

Il est immédiat que la première composante de $p_i(\mu_\varphi)$ est nulle, car l'on a $p_i(\mu)(a_1, \dots, a_{n_i}) = 0$, (V, μ) étant de type S.

Théorème 1. L'ensemble des extensions de type S de l'algèbre $A = (V, \mu)$ par elle-même est donné par l'espace tangent $T\mu(S(V))$ en μ à l'ensemble algébrique $S(V)$.

Démonstration.

(a) Il faut analyser la condition de la nullité de la seconde composante de $p_i(\mu_\varphi)((a_1, m_1), \dots, (a_{n_i}, m_{n_i}))$.

Ce terme s'écrit comme la somme d'une expression indépendante de φ

$$(*) \quad B_i(\mu)((a_1, m_1), \dots, (a_{n_i}, m_{n_i}))$$

et d'une expression

$$(**) \quad C_i(\mu, \varphi)(a_1, \dots, a_{n_i}).$$

(b) La première est de la forme:

$$B_i(\mu)((a_1, m_1), \dots, (a_{n_i}, m_{n_i})) = \sum_{j=1}^{n_i} p_i(\mu)(a_1, \dots, a_{j-1}, m_j, a_{j+1}, \dots, a_{n_i}).$$

On le démontre par récurrence en supposant d'abord que P_0 est un "monôme", produit de deux éléments de degrés inférieurs à n_1 . Si on se souvient que m_j appartient à A on voit que chaque terme de (*) est nul, car A est de type S.

(c) Montrons maintenant que

$$C_i(\mu, \varphi)(a_1, \dots, a_{n_i}) = (D_{\mu} p_i)(\varphi)(a_1, \dots, a_{n_i}).$$

Si $P = a \otimes b$ on a

$$C(\mu, \varphi)(a_1, a_2) = \varphi(a_1, a_2) = (D_{\mu} I)(\varphi)(a_1, a_2).$$

Supposons maintenant la formule vraie pour tout $n' < n$. Si $P = P' \otimes P''$ où P' et P'' sont des éléments homogènes de degrés respectivement q et $n-q$ de l'épouvantail $\mathcal{E}(k^n)$, on obtient (en notant C' et C'' les quantités associées à P' et P''):

$$\begin{aligned} C(\mu, \varphi)(a_1, \dots, a_n) &= \varphi(p'(\mu)(a_1, \dots, a_q), p''(\mu)(a_{q+1}, \dots, a_n)) \\ &\quad + \mu(p'(\mu)(a_1, \dots, a_q), C''(\mu, \varphi)(a_{q+1}, \dots, a_n)) \\ &\quad + \mu(C'(\mu, \varphi)(a_1, \dots, a_q), p''(\mu)(a_{q+1}, \dots, a_n)). \end{aligned}$$

Or l'application polynomiale p associée à P vérifie:

$$p(\mu)(a_1, \dots, a_n) = \mu(p'(\mu)(a_1, \dots, a_q), p''(\mu)(a_{q+1}, \dots, a_n)).$$

Nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned} C(\mu, \varphi)(a_1, \dots, a_n) &= \varphi(p'(\mu)(a_1, \dots, a_q), p''(\mu)(a_{q+1}, \dots, a_n)) \\ &\quad + \mu(p'(\mu)(a_1, \dots, a_q), (D_{\mu} p'')(\varphi)(a_{q+1}, \dots, a_n)) \\ &\quad + \mu((D_{\mu} p')(\varphi)(a_1, \dots, a_q), p''(\mu)(a_{q+1}, \dots, a_n)) \\ &= \sum_{j=1}^n \tilde{p}(\mu, \dots, \varphi, \dots, \mu)(a_1, \dots, a_n) \\ &= (D_{\mu} p)(\varphi)(a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration par récurrence.

L'équation exprimant que φ donne une extension de type S de l'algèbre (V, μ) par elle-même se résume en la suivante:

$$(D_{\mu} p_i)(\varphi)(a_1, \dots, a_{n_i}) = 0 \quad i \in I.$$

Ce qui signifie que φ est un vecteur tangent en μ à l'ensemble $p_i^{-1}(0)$, et par la suite à $\bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(0) = S(V)$.

Théorème de rigidité. Si le groupe des extensions de type S de l'algèbre (V, μ) par elle-même est nul, l'algèbre (V, μ) est rigide dans S. Il est immédiat de vérifier que deux extensions φ et φ' sont équivalentes si et seulement si la différence $\varphi - \varphi'$ est un vecteur tangent à l'orbite de μ .

Par suite le groupe des extensions $\text{Ext}(V, \mu)$ s'identifie au quotient des espaces tangents en μ à l'ensemble algébrique $S(V)$ et à l'orbite de μ , c'est-à-dire que l'orbite est un voisinage de μ dans $S(V)$ si $\text{Ext}(V, \mu) = 0$.

4. Les obstructions.

Supposons que sans connaître la cohomologie d'algèbres de type S, déterminée par un élément P de $\mathcal{E}^n(k^n)$ nous sommes en mesure de prolonger le diagramme

$$L^0 \xrightarrow{\delta^0} L^1 \xrightarrow{\delta^1} L^2$$

où $L^2 = \text{Hom}(\otimes^n V, V)$ en un diagramme

$$L^0 \xrightarrow{\delta^0} L^1 \xrightarrow{\delta^1} L^2 \xrightarrow{\delta^2} L^3$$

où $\delta^2 \cdot \delta^1 = 0$.

Alors on obtient le théorème suivant:

Théorème d'obstruction. Si le groupe H^2 est nul, pour tout cocycle φ_1 la première obstruction à la déformation de μ est nulle.

Démonstration. La première obstruction en φ_1 est nulle s'il existe un élément φ_2 tel que l'on ait

$$p(\mu + t\varphi_1 + t^2\varphi_2) = 0 \pmod{t^3}$$

ce qui donne

$$(D_\mu p)(\varphi_2) + \sum_{i < j} p(\mu, \dots, \overset{i}{\mu}, \varphi_1, \mu, \dots, \overset{j}{\mu}, \varphi_2, \mu, \dots, \mu) = 0$$

ou bien

$$(D_\mu p)(\varphi_2) = - \sum \overline{p}(\mu, \dots, \overset{i}{\varphi_1}, \dots, \overset{j}{\varphi_2}, \dots, \mu).$$

Notons $\chi_\mu(\varphi', \varphi'')$ la quantité

$$\sum_{\substack{i < j \\ i \neq j}} p(\mu, \dots, \overset{i}{\varphi'}, \dots, \overset{j}{\varphi''}, \dots, \mu) .$$

$\sim$
 $n-1$

La nullité de la première obstruction en φ_1 équivaut donc à l'existence d'un élément φ_2 de L^1 tel que l'on ait

$$(\delta_\mu^1)(\varphi_2) = -\chi_\mu(\varphi_1, \varphi_1).$$

Pour tout élément φ de L^1 soit

$$q_\varphi: L^1 \rightarrow L^3$$

l'application définie par

$$q_{\varphi}(\mu) = \delta_{\mu}^2(\delta_{\mu}^1(\varphi)).$$

L'application q_{φ} est polynomiale homogène de degré $2(n-2)$ puisqu'il existe une application

$$\bar{q}_{\varphi} : L^1 \times L^1 \underbrace{\times \dots \times L^1}_{2(n-2) \text{ fois}} \rightarrow L^3$$

$2(n-2)$ -linéaire définie par

$$q_{\varphi}(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n, \dots, \mu_{2(n-2)}) = \delta_{\mu_1, \dots, \mu_{n-2}}^2(\delta_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{2n-4}}^1(\varphi))$$

telle que

$$\bar{q}_{\varphi}(\mu, \dots, \mu) = q_{\varphi}(\mu).$$

Les applications $\delta_{\mu_1, \dots, \mu_{n-2}}^2$ et $\delta_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{2n-4}}^1$ sont "polarisées" de $\mu \mapsto \delta_{\mu}^2$ et $\mu \mapsto \delta_{\mu}^1$.

Pour tout élément φ l'application polynomiale q_{φ} s'annule sur $S(V)$.

Nous avons donc:

$$(D_{\mu} q_{\varphi})(\varphi') = 0,$$

pour tout $\mu \in S(V)$ et pour tout vecteur φ' tangent en μ à $S(V)$. Or on a

$$\begin{aligned} (D_{\mu} q_{\varphi})(\varphi') &= \sum_{i=1}^{2(n-2)} q_{\varphi}(\mu, \dots, \varphi', \dots, \mu) \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \bar{q}_{\varphi}(\mu, \dots, \varphi', \dots, \mu) + \sum_{i=n-1}^{2(n-2)} \bar{q}_{\varphi}(\mu, \dots, \varphi', \dots, \mu) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{\mu, \dots, \varphi', \dots, \mu}^2 (\delta_{\mu}^2(\varphi)) + \sum_{i=1}^{n-2} \delta_{\mu, \dots, \varphi_1, \dots, \mu}^2 (\delta_{\mu}^1(\varphi)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-2} \delta_{\mu, \dots, \varphi', \dots, \mu}^2 \right) (\delta_{\mu}^1(\varphi)) + \delta_{\mu}^2 \left(\sum_{i=1}^{n-2} \delta_{\mu, \dots, \varphi', \dots, \mu}^1 (\varphi) \right).
\end{aligned}$$

Nous obtenons pour tout élément φ de L^1 et tout 1-cocycle φ' l'équation:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} \delta_{\mu, \dots, \varphi', \dots, \mu}^2 \right) (\delta_{\mu}^1(\varphi)) + \delta_{\mu}^2 (2\chi_{\mu}(\varphi', \varphi)) = 0.$$

Si l'élément φ est tangent en μ à $S(V)$ on obtient tout simplement

$$\delta_{\mu}^2 (\chi_{\mu}(\varphi', \varphi)) = 0.$$

En particulier si φ_1 est un vecteur tangent en μ à $S(V)$

$$\delta_{\mu}^2 (\chi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_1)) = 0.$$

Ceci implique que l'élément $\chi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_1)$ est un 2-cocycle. Le groupe

H_{μ}^2 étant nul, il existe un élément φ_2 de L^1 tel que l'on ait:

$$\delta_{\mu}^1(\varphi_2) = -\chi_{\mu}(\varphi_1, \varphi_1).$$

Bibliographie

- [1] N. Bourbaki, Algèbre, Paris, Hermann(1958).
- [2] H. Cartan et C. Chevalley, Géométrie algébrique, Séminaire E.N.S. 1956-1958.
- [3] M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras, Ann. of Math. 79 (1964).
- [4] G. P. Hochschild, On the cohomology of an associative algebra. Ann. of Math. Vol. 46 (1945).
- [5] S. Klasa, Séminaire sur les déformations des structures algébriques, Università di Pisa, octobre 1966.
- [6] S. Klasa, Rigidité de certaines algèbres de Jordan, C.R. de l'Académie des Sciences de Paris, t. 267 (9 septembre 1968).
- [7] A. Nijenhuis, Graded Lie algebras and their applications. Universiteit van Amsterdam, (1964).
- [8] A. Nijenhuis, Composition systems and deformations of subalgebras. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen-Amsterdam, Series A, 71 (1968).
- [9] A. Nijenhuis et R. Richardson, Cohomology and deformations in graded Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966).
- [10] R. D. Schafer, An introduction to non associative algebras. Academic Press, New York and London (1966).

